Introducción a la Óptica Cuántica

Tarea 1

Ver fecha de entrega en la página.

1. La distribución de probabilidad cuadrada se define como

   $$P(x) = 0 \,\text{para}\, |x| > a \,, P(x) = (2a)^{-1} \,\text{para}\, |x| < a \,.$$

   Calcula sus momentos.

2. La distribución de Lorentz esta dada por

   $$P(x) = \frac{\gamma}{\pi\left((x-a)^2 + \gamma^2\right)} \; (-\infty < x < \infty).$$

   a) Dibújala

   b) Cual es su primer momento (valor promedio). Argumenta porque podría ser a.

   c) ¿Cual es su varianza?

3. Da un ejemplo cuya distribución de probabilidad sea la de Poisson. Demuestra que así es.

4. Sean N variables estocásticas cuyas distribuciones de probabilidad son conocidas. Escribe la distribución de probabilidad conjunta si sabemos que son mutuamente independientes.

5. Dos dados son lanzados y su salida suma 9. ¿Cual es la distribución de probabilidad de la salida del primer dado condicionado a este total? ¿Porque este resultado no es incompatible con el hecho de que los dos dados son independientes?

6. Muestra que para cualquier conjunto $X_1, X_2, \cdots, X_r$ es posible encontrar r combinaciones lineales

   $$Y_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} X_j \; (i = 1, \ldots, r)$$

   tales que las nuevas variables Y son mutuamente no correlacionadas (consejo: usar el procedimiento de ortogonalización de Schmidt).

7. Investiga y detalla en pocas palabras que información nos da la "skewness" y la "kurtosis" sobre la distribución de una variable aleatoria.

8. Sea X_1 y X_2 dos variables aleatorias. Considera la variable aleatoria $Y = X_1 + X_2$. Muestra que

   a) Siempre $\langle Y \rangle = \langle X_1 \rangle + \langle X_2 \rangle$

   b) Muestra que si X_1 y X_2 no están correlacionadas entonces $\sigma_Y^2 = \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2$

9. Un cañón dispara una pelota con velocidad inicial v y con ángulo θ respecto al piso. Supongamos que tanto v como θ tienen incertidumbres cada una descritas con gaussianas centradas en v_0 y θ_0 respectivamente. Ignorando los posibles valores negativos de v y θ ¿cual es la distribución de probabilidad de la distancia recorrida por la pelota?

10. Prueba que la distribución de la suma de dos

    a) gaussianas es gaussiana

    b) lorentzianas es lorentziana

    c) poissonianas es poissoniana.

11. Describe de que se trata el problema de la caminata aleatoria. Aplica el teorema del límite central a este problema.

12. ¿El teorema del límite central se aplica a sumas de variables aleatorias con distribuciones lorentzianas? Justifica tu respuesta.

13. ¿El teorema del límite central se aplica a sumas de variables aleatorias con distribuciones poissonianas? Justifica tu respuesta.

14. Define un proceso estocástico –puede ser uno sencillo relacionado con el resultado de tirar dados o monedas. Simúlalo en una computadora (o con el dado o las monedas) y grafícalo varias veces. Calcula su distribución de probabilidad así como su promedio.