SEMINARIO DE OPERADORES Y FÍSICA–MATEMÁTICA

Organizers: Dr. Ricardo Weder y Dr. Rafael del Río

- **SCATTERING MATRIX FOR MAGNETIC POTENTIALS WITH COULOMB DECAY AT INFINITY**
- **THERE IS NO AHARONOV–BOHM EFFECT IN DIMENSION THREE**

Dr. Dimitri Yafaev
Universidad de Rennes–1

Abstract

Consider the scattering amplitude $s(\omega,\omega';\lambda), \omega,\omega' \in S^2, \lambda > 0,$ corresponding to an arbitrary three–dimensional short–range magnetic field $B(x)$. The magnetic potential $A^{(tr)}(x)$ such that curl $A^{(tr)}(x) = B(x)$ and $< a^{(tr)}(x), x >= 0$ decays at infinity as x^{-1} only. Nevertheless, we show that the structure of $s(\omega,\omega';\lambda),$ is the same as for short–range magnetic potentials. In particular, the leading diagonal singularity $s_0(\omega,\omega')$ of $s(\omega,\omega';\lambda),$ is the Dirac function. Thus, up to the diagonal Dirac function, the scattering amplitude has only a weak singularity in the forward direction and hence scattering is essentially of short–range nature. This is qualitatively different from the two–dimensional case where $s_0(\omega,\omega')$ is a linear combination of the Dirac function and of a singular denominator, that is the Aharonov–Bohm effect occurs. Our approach relies on a construction of a special gauge, adapted to a given magnetic field $B(x),$ such that the corresponding magnetic potential $A(x)$ is also short–range.

3 y 4 de noviembre de 2004.

◊

ON THE MATHEMATICAL THEORY OF THE AHARONOV–BOHM EFFECT

Dr. Dimitri Yafaev
Universidad de Rennes–1

Abstract

We consider the Schrödinger operator $H = (i\nabla + A)^2$ in the space $L_2(\mathrm{R}^2)$ with a magnetic potential $A(x) = a(\hat{x})(-x_2, x_1)|x|^{-2}$, where a is an arbitrary function on the unit circle. Our goal is to study spectral properties of the corresponding scattering matrix $S(\lambda),\ \lambda$ >0. We obtain its stationary representation and show that its singular part (up to compact terms) is a pseudo differential operator of zero order whose symbol is an explicit function of a. We deduce from this result that the essential spectrum of $S(\lambda)$ does not depend on λ and consists of two complex conjugated and perhaps overlapping closed intervals of the unit circle. Finally, we calculate the diagonal singularity of the scattering amplitude (kernel of $S(\lambda)$ considered as an integral operator). In particular, we show that for all these properties only the behaviour of a potential at infinity is essential. The preceding papers on this

subject treated the case $a(\hat{x}) =$ const and used the separation of variables in the Schrödinger equation in the polar coordinates.

This technique does not of course work for arbitrary a. From analytical point of view, our paper relies on some modern tools of scattering theory and well–known properties of pseudodifferential operators.

28 de octubre de 2004.

◊

SIMETRÍAS ESCONDIDAS, SISTEMAS INTEGRABLES Y MATRICES DE JACOBI

Dr. Ernesto Lacomba Zamora
Universidad Nacional Autónoma de México

Resumen

En esta serie de conferencias voy a describir los sistemas completamente integrables y su relación con los pares de Lax de operadores y en particular con las matrices de Jacobi, cuando otros conceptos se aplican a los reticulados de Toda. Todo esto está relacionado con el tema de simetrías escondidas en sistemas dinámicos.

Comenzaremos por la definición de sistemas Hamiltonianos completamente integrables, es decir, aquellos que admiten un grupo de simetrías con dimensión la mitad del espacio fase y además este grupo es conmutativo. El teorema de Liouville–Arnold nos dice que el espacio fase se descompone en subconjuntos invariantes que son el producto de un espacio euclidiano por un toro de dimensión mayor o igual que 1; el campo vectorial en dichos subconjuntos es muy simple y puede integrarse directamente. Daremos como ejemplos simples de esta situación el problema de Kepler y el reticulado de Toda con 3 partículas en una circunferencia.

Más adelante veremos cómo el reticulado de Toda en general es un ejemplo de sistema Hamiltoniano que se puede escribir como un par de Lax, es decir, por medio de una ecuación diferencial matricial que involucra 2 matrices, que en este caso resultan matrices de Jacobi.

30 de septiembre y 7 y 15 de octubre de 2004.

◊

EL PROBLEMA INVERSO EN LA DISPERSIÓN POR POTENCIALES DE AHARONOV–BOHM

Fís. Miguel A. Ballesteros Montero
Universidad Nacional Autónoma de México

Resumen

Se estudia el efecto Aharonov–Bohm desde e punto de vista de la teoría de dispersión inversa dependiente del tiempo, objeto del artículo: Weder, Ricardo: *The Aharonov–Bohm effect and time–dependent inverse scattering theory*, Inverse Problems 18 (2002), 1041–1056.

El efecto Aharonov–Bohm considera la dispersión de un electrón por el campo magnético debido a un solenoide ideal, con altura infinita. Se trata el caso en el que un campo magnético singular arbitrario está contenido en un cilindro de altura infinita, paralelo al eje *z* cuya sección transversal es un compacto *K*. Se toma un campo magnético regular de soporte compacto, definido en el complemento de *K* uniformemente continuo y cuyas derivadas de primer orden son uniformemente continuas. Se demuestra que a partir del límite de altas energías del operador de dispersión, suponiendo que *K* es convexo,

podemos reconstruir el campo magnético regular en el complemento de *K* y el flujo magnético sobre *K* módulo 2.

El caso particular K = {0} corresponde a un solenoide ideal de radio cero.

23 de septiembre de 2004.

◊

TEORÍA ESPECTRAL DE SISTEMAS DINÁMICOS (II)

Dr. Ricardo Berlanga
Universidad Nacional Autónoma de México

9 de septiembre de 2004.

◊

EL TEOREMA ESPECTRAL: UNA DEMOSTRACIÓN ERGÓDICA

Dr. Ricardo Berlanga
Universidad Nacional Autónoma de México

Resumen

La teoría ergódica estudia el comportamiento asintótico de las transformaciones que preservan medida.

Una situación clásica es la que nos dice que el flujo fase de un sistema hamiltoniano preserva volumen. De aquí por tanto deriva la importancia de la Teoría Ergódica. En muchos de los problemas la diferenciabilidad no desempeña ningún papel, pero medibilidad es un concepto crítico, haciendo deseable entonces el estudio de transformaciones a las que se les exige ser únicamente medibles. En este contexto las ideas de ergodicidad, recurrencia, mezclado y entropía resultan fácilmente entendibles.

Después de discutir algunas ideas y teoremas centrales, resultará interesante abordar “El Teorema Espectral” en este contexto dinámico.

26 de agosto de 2004.

◊

FUNCIONALES POSITIVOS ASOCIADOS A MATRICES DE JACOBI

Dr. Luis O. Silva
Universidad Nacional Autónoma de México

Resumen

Tomando como punto de partida matrices de Jacobi se construyen varios tipos de funcionales definidos positivamente. En esta plática se encontrarán las relaciones entre estos funcionales y se demostrará un teorema de Chebyshev con importancia para resolver problemas de actualidad en la teoría espectral de operadores.

18 de junio de 2004.

◊

FÓRMULAS DE CUADRATURA PARA MEDIDAS ASOCIADAS A MATRICES DE JACOBI I Y II

Dr. Luis O. Silva
Universidad Nacional Autónoma de México

Resumen

En esta plática se obtendrá la fórmula de cuadratura que permite aproximar integrales tomadas con respecto a la medida asociada a matrices de Jacobi. Se analizarán las aplicaciones de esta fórmula y se demostrarán algunos resultados que se desprenden directamente de ella y que son relevantes en áreas de investigación de la teoría espectral de operadores.

3 y 10 de junio de 2004.

◊

EL TEOREMA DE BORG Y OTROS TEOREMAS INVERSOS PARA MATRICES DE JACOBI SEMI–INFINITAS

Dr. Luis O. Silva
Universidad Nacional Autónoma de México

Resumen

En esta plática se expondrá la forma de obtener el análogo al teorema inverso de Borg para el caso de matrices de Jacobi semi–infinitas. Asimismo, se tratarán otros resultados afines a este teorema que tienen también su equivalente en la teoría inversa de operadores unidimensionales de Schrödinger.

27 de mayo de 2004.

◊

INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS ESPECTRAL INVERSO DE MATRICES DE JACOBI I Y II

Dr. Luis O. Silva
Universidad Nacional Autónoma de México

Resumen

Plática introductoria a la teoría de problemas inversos para operadores asociados con matrices de Jacobi semi–infinitas. Se exponen las particularidades de esta teoría, así como las similitudes con el análisis espectral inverso de operadores Sturm–Liouville.

11 y 20 de mayo de 2004.

◊

SPECTRA OF 1–D PERIODIC DIRAC OPERATORS AND SMOOTHNESS OF POTENTIALS

Dr. Boris Mityagin
Ohio State University

3 de mayo de 2004.

◊

SOLUCIONES ASINTÓTICAS DE LA APROXIMACIÓN DE BORN OPPENHEIMER INDEPENDIENTE DEL TIEMPO

Dr. Julio H. Toloza
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

28 de abril de 2004.

◊

OPERADORES DE TOEPLITZ CON SÍMBOLO EN ESPACIOS DE NORMA MIXTA Y CLASES DE SCHATTEN

Dr. Salvador Pérez Esteva
Universidad Nacional Autónoma de México

Resumen

Se estudia la continuidad, compacidad y permanencia en las clases de Schatten de aquellos operadores de Toeplitz cuyo símbolo está en los llamados espacios de Herz del disco unitario.

25 de marzo de 2004.

◊

PAIRS OF JACOBI MATRICES AND DUAL FAMILIES OF Q–ORTHOGONAL POLYNOMIALS

Dr. A.U. Klimyk
Bogolyubov Institute for Theoretical Physics

Abstract

We discuss an application of pairs of symmetric (self–adjoint) operators, representable by Jacobi matrices (they are operators of discrete series representations of the quantum algebra $U_q(su_{1,1})$) to the study of properties of q–orthogonal polynomials. One operator of a pair is related to a three–term recurrence relation for a given set of orthogonal polynomials and the second one to a q–difference equation for them. This approach allows us to consider a given set of q–orthogonal polynomials and a dual family of polynomials with respect to this set. By means of these two operators and a notion of duality, one can prove orthogonality relations for given sets of polynomials and their duals.

Our results can be viewed as an extension of the notion of duality, which is well known for orthogonal polynomials on a finite set of points, to the case of countable sets of points of orthogonality. In this way one can pair known families of q–orthogonal polynomials into dual families. For some families of

polynomials this notion of duality leads to families of *q*–orthogonal polynomials, which have not been discussed in the literature. The *q*–orthogonal polynomials, dual to the big *q–Jacobi* polynomials, may be an instance of such novel sets.

16 de marzo de 2004.

◊

TEOREMA DE STONE Y RESULTADOS AFINES. (¿QUÉ OPERADORES PUEDEN SER REPRESENTADOS POR MATRICES DE JACOBI?) I Y II

Dr. Luis O. Silva
Universidad Nacional Autónoma de México

Resumen

A partir de una matriz de Jacobi se define en forma genérica a un operador que resulta ser simétrico y tener propiedades espectrales específicas. ¿Qué propiedades debe poseer un operador simétrico y, en particular, autoadjunto para que exista una matriz de Jacobi que genere a este operador? Los resultados que dan respuesta a esta pregunta se consideran clásicos e ilustran el importante papel de matrices de Jacobi en la teoría espectral de operadores.

3 y 9 de marzo de 2004.

◊

MODELOS RECÍPROCOS Y SU RELACIÓN CON OPERADORES AUTOADJUNTOS

Dr. Ernesto Lacomba Zamora
Universidad Nacional Autónoma de México

Resumen

Por modelos recíprocos o potenciales entendemos aquellos que pueden definirse por medio de la diferencial de una función a valores reales. Como ejemplos tenemos un campo vectorial gradiente o Hamiltoniano, o un circuito eléctrico recíproco, pero también un sistema termodinámico en equilibrio. Describiremos en forma sencilla cómo aparece en forma natural una estructura simpléctica. Si reemplazamos la función por un funcional como los del cálculo de variaciones, encontramos que la solución al problema inverso del cálculo variacional es equivalente a que cierto operador sea autoadjunto. Esto puede extenderse a otros modelos con operadores autoadjuntos.

25 de febrero de 2004.

◊

EFECTO AHARANOV–BOHM

Dr. Miguel A. Ballesteros Montero
Universidad Nacional Autónoma de México

18 de febrero de 2004.